Teorema de Poincaré-Bendixson para Ecuaciones Diferenciales con retardo

Introducción

La idea de este apunte es poder entender con cierto detalle la generalización del teorema de Poincaré-Bendixson. Estudiamos el resultado para ecuaciones diferenciales con retardo para el caso de sistemas con feedback, monótonos y cíclicos. Las referencias a este apunte son [1], [2] y [3].

Comencemos con una serie de definiciones y resultados conocidos para entrar en tema:

Definición 0.1. *Un sistema dinámico continuo está dado por una función continua* $\Phi : \mathbb{R} \times E \to E$ *que verifica dos condiciones:*

- $\Phi(0, x) = x$ *para todo* $x \in E$*;*
- $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x) = \Phi(t + s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$ *para todo* $s, t \in \mathbb{R}$ *y para todo* $x \in E$*.*

Definición 0.2.
- *Un punto periódico de* Φ *de período* t_0 $(t_0 > 0)$ *es un punto* $x \in E$ *tal que* $\Phi(t_0, x) = x$ *y* $\Phi(t, x) \neq x$ *para todo* $0 < t < t_0$*.*
- *Escribimos* $\mathrm{Orb}(x) = \{\Phi(t, x) : t \in \mathbb{R}\}$ *para llamar a la órbita de un punto* $x \in E$ *y análogamente,* $\mathrm{Orb}_+(x) = \{\Phi(t, x) : t \geq 0\}$ *para llamar a la órbita positiva.*

Definición 0.3.
- *El* ω*-límite de un punto* $x \in E$ *es el conjunto* $\omega(x) = \{y \in E : \text{existe } t_n \to -\infty \text{ tal que } \Phi(t_n, x) \to y\}$*. De manera similar, el* α*-límite es* $\alpha(x) = \{y \in E : \text{existe } t_n \to -\infty \text{ tal que } \Phi(t_n, x) \to y\}$*.*

Definición 0.4. *Dado* $C \subseteq E$*, decimos que:*

- C *es positivamente invariante si* $\mathrm{Orb}_+(x) \subseteq C$ *para todo* $x \in C$*.*
- C *es invariante si* $\Phi(t, C) = C$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$*.*

Observación 0.5. *Supongamos que E es un espacio de dimensión finita y sea $x \in E$ un punto cualquiera cuya órbita es acotada. Es decir, $\overline{\mathrm{Orb}(x)}$ es un conjunto compacto y por consiguiente, $\omega(x)$ es un conjunto no vacío compacto, conexo e invariante. Para el caso infinito, naturalmente no se tiene el resultado tan inmediato y nos limitaremos a trabajar sobre puntos, en nuestro caso funciones, cuya órbita positiva sea relativamente compacta.*

Ahora si estamos en condiciones de estudiar el resultado. Para empezar, recordemos que la versión clásica describe la dinámica de cualquier sistema planar. Más aún, una consecuencia inmediata de este teorema es que cada subconjunto positivamente invariante compacto de $\mathbb{R}^2$ que no contiene puntos fijos debe incluir una órbita periódica. Concretamente, el teorema establece lo siguiente:

Teorema 0.6 (Poincaré-Bendixson)**.** *Dado $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un sistema dinámico continuo y dado $x \in \mathbb{R}^2$ un punto con órbita relativamente compacta, entonces sucede alguna de estas opciones:*

- *x es un punto periódico; o bien*
- *existe un punto periódico x_0 tal que $\Phi(t,x) \rightsquigarrow \mathrm{Orb}(x_0)$ cuando $t \rightsquigarrow \infty$, donde $\mathrm{Orb}(x_0)$ es topológicamente equivalente a S^1 ; o bien*
- *existe un punto fijo x_1 tal que $\Phi(t_n,x) \rightsquigarrow x_1$ para alguna sucesión $t_n \rightsquigarrow \infty$.*

Es claro que no se puede esperar que se extienda este resultado a cualquier tipo de ecuaciones diferenciales (con retardo). Pero se puede aplicar el teorema si nos restringimos al caso de sistemas monótonos, teniendo en cuenta las modificaciones necesarias. Para ello, tomamos el conjunto $\mathbb{K} = [-1,0] \cup \{1,2,3,\cdots,N\}$ y llamamos C al espacio (de Banach) de funciones continuas en $\mathbb{K}$.
Dada $X \in C(\mathbb{R})$, definimos $X_t \in C$ como

$$X_t(\theta) := \begin{cases} X(t+\theta), & \text{si } \theta \in [-1,0]; \\ X^\theta(t), & \text{si } \theta \in \{1,2,3,\dots,N\}. \end{cases}$$

Así si consideramos la ecuación $X^{'}(t) = F(X_t)$, el flujo asociado a la ecuación es $\Phi : \mathbb{R}^+ \times C \to C$ dado por $\Phi(t,\phi) = X_t(\phi)$.

Sistemas monótonos con feedback

En esta sección analizamos en qué tipo de sistemas vamos a poder aplicar el teorema y enunciamos qué tipo funciones son solución de estos sistemas.
Sean f_i funciones $C^1(\mathbb{R}^2)$ para todo $i = 0,\dots,N$ y tales que $\frac{\partial f_i}{\partial \xi}(\zeta,\xi) \neq 0$ para todo $(\zeta,\xi) \in \mathbb{R}^2$. Escribimos:

$$\begin{cases} x_i^{'}(t) &= f_i(x_i(t), x_{i+1}(t-\tau_i)), \quad \text{para } i = 0,\dots,N-1; \\ x_N^{'}(t) &= f_N(x_N(t), x_0(t-\tau_N)) \end{cases}$$

con $\tau_i \geq 0$ y $x_{N+1} = x_0$.
Notemos que el feedback del retardo de x_{i+1} en x_i está determinado por

$$\delta_i = \begin{cases} +1, & \text{si } \frac{\partial f_i}{\partial \xi} > 0; \\ -1, & \text{si } \frac{\partial f_i}{\partial \xi} < 0. \end{cases}$$

De esta manera, si $\delta^* = \prod_i \delta_i = 1$ decimos que el feedback es positivo y en caso contrario, el feedback es negativo. En el caso que $\delta^* = 1$, el sistema genera un semiflujo monótono (y acotado). Como la función $t \mapsto \Phi_t$ es monótona, las órbitas genéricas convergen al equilibrio y no existen puntos periódicos.
El sistema anterior se puede normalizar escribiendo:

$$\begin{cases} y_0 &= x_0(t); \\ y_i &= x_i(t - \sum_{j=0}^{i-1} \tau_j), \quad \text{para } i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Es decir, si ponemos

$$\tau = \sum_{j=0}^{N} \tau_j$$

obtenemos un sistema con un único delay:

$$\begin{cases} y_i^{'}(t) &= f_i(y_i(t), y_{i+1}(t)), \quad \text{para } i = 0, \dots, N-1; \\ y_N^{'}(t) &= f_N(y_N(t), y_0(t-\tau)). \end{cases}$$

Más en general, el teorema se puede aplicar para los sistemas del tipo:

$$\begin{cases} x_0^{'}(t) &= f_0(x_0(t), x_1(t)); \\ x_i^{'}(t) &= f_i(x_{i-1}, x_i(t), x_{i+1}(t)), \quad \text{para } i = 0, \dots, N-1; \\ x_N^{'}(t) &= f_N(x_{N-1}(t), x_N(t), x_0(t-1)) \end{cases}$$

donde las funciones f_i son $C^1(\mathbb{R}^3)$ (y f_0 una función $C^1(\mathbb{R}^2)$) con $\frac{\partial f_i}{\partial \zeta}(\zeta, \xi, \eta) \geq 0$ y $\delta_i \frac{\partial f_i}{\partial \eta}(\zeta, \xi, \eta) > 0$ para todo $i = 0, \dots, N$.

Por último, decimos que x es solución en un cierto intervalo I si:

- x es una función $C^1(I)$.
- x_0 es continua en $\tilde{I} = \{t + \theta : t \in I, \theta \in [-1, 0]\}$
- x satisface las ecuaciones.

Por lo mencionado anteriormente, sabemos que si $\overline{\text{Orb}_+(\phi)}$ es un conjunto compacto, el ω-límite

$$\omega(\phi) = \{\psi \in C : ||X_{t_n}(\phi) - \psi|| \to 0 \quad \text{si } t_n \to \infty\}$$

es un conjunto no vacío, compacto, conexo e invariante. Luego, aplicando el método de pasos, se tiene que para cada $\psi \in \omega(\phi)$ existe una solución $u(\cdot) \in \omega(\phi)$ que satisface

$$\begin{cases} u_0 &= \psi; \\ u_t &\in \omega(\phi) \quad \text{para todo } t. \end{cases}$$

Teorema de Poincaré-Bendixson para ecuaciones con retardo

Antes de enunciar el teorema, cabe mencionar que una solución puede extenderse a toda la recta. En ese caso, el α-límite está bien definido y se puede aplicar el teorema. Llamamos E al conjunto de puntos de equilibrios con la identificación de siempre en el espacio de funciones continuas.

Teorema 0.7 (Teorema de Poincaré-Bendixson para ecuaciones con retardo)**.** *Dado el sistema anterior, con $f_i \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ó $C^1(\mathbb{R}^2)$ y dada $x(t)$ una solución acotada del sistema en $[t_0, +\infty)$, sucede alguna de estas opciones:*

(a) El ω-límite consiste de una única órbita periódica no constante.

(b) para cada solución $u(\cdot)$ del sistema en $\omega(x)$, i.e. para soluciones con $u_t \in \omega(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $\alpha(u) \cup \omega(u) \subseteq E$.

Además, existe una proyección planar $\pi_i : \omega(x) \to \pi_i(\omega(x)) \subseteq \mathbb{R}^2$ que es biyectiva y embebe $\omega(x)$ homeomórficamente en el plano.

Observación 0.8.

- *El teorema contempla el caso $\omega(x) = \{e\}$, esto es $x(t) \to e$ cuando $t \to \infty$.*
- *Si E es un conjunto de puntos aislados y sucede (b), se verifica que $u(t) \to e$ cuando $t \to \pm\infty$. O sea, los conjuntos $\alpha(u)$ y $\omega(u)$ son conexos y por lo tanto existe un único equilibrio.*
- *Si E consiste de puntos no necesariamente aislados, no se puede asegurar que $u(t) \to e$ cuando $t \to \pm\infty$. Es decir, los conjuntos $\alpha(u)$ y $\omega(u)$ son un continuo de puntos de equilibrio.*
- *Si existe solución con $t \to -\infty$, esta solución es única.*

Esencialmente, lo que se demuestra es que ciertos subconjuntos de $\omega(x_0)$ (o bien de $\mathrm{Orb}_+(x_0)$) se pueden mapear homeomórficamente al plano via proyectores y aplicar argumentos similares a los utilizados en la demostración de la versión clásica. A partir de allí, es fácil concluir que $\omega(x_0)$ se puede mapear homeomórficamente al plano.

Ejemplos

En esta sección veamos algunos ejemplos donde se puede aplicar el teorema:

(1) Control de transcripción de genes.
Tomamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1^{'}(t) &=& g(x_n(t-\tau_n)) - \alpha_1 x_1(t); \\ x_j^{'}(t) &=& x_{j-1}(t-\tau_{j-1})) - \alpha_j x_j(t), \quad \text{si } j = 2, \ldots, n. \end{cases}$$

La idea de este modelo es que se puede transcribir la información (enzimática) a partir de x_i a x_{i+1} hasta llegar a x_n. Luego, x_n actúa para cancelar la transcripción. Para ello pedimos al mismo tiempo que $g^{'}(x) < 0$. Los delays τ_j cuentan el tiempo de trascripción, traslación y transporte de información. Los coeficientes $\alpha_j > 0$ respresentan el decrecimiento de la tasa de especies.

(2) Control de niveles de testosterona en sangre.
Este sistema es muy similar al ejemplo (1):

$$\begin{cases} R^{'}(t) &=& f(T(t)) - b_1 R(t); \\ L^{'}(t) &=& g_1(R(t)) - b_2 L(t); \\ T^{'}(t) &=& g_2(L(t-\tau)) - b_3 T(t). \end{cases}$$

En este ciclo, la función R representa la hormona LHRH que controla la salida de LH que está respresentada por la función L. A su vez, L controla la salida de testosterona, la que está representada por la función T. La función $f(T)$ modela el feedback de la producción de LHRH por la testosterona. Claramente, se pide $f(0) > 0$ y $f^{'} < 0$. El delay τ contempla el tiempo de circulación de sangre en el cuerpo.

(3) Ecuación de Wright.
Consideramos la ecuación

$$y^{'}(t) = -\alpha y(t-1)(1+y(t)), \text{con } \alpha > 0.$$

Si $y(t) > -1$, la ecuación transforma en $x^{'}(t) = f(x(t-1))$ donde $f(x) = -\alpha(e^x - 1)$.

Aplicando el teorema y teoría de Morse, se puede dar una clasificación de las ecuaciones de la clase $x^{'}(t) = f(x(t-1))$:

(i) Si el origen es un equilibrio hiperbólico[1], toda solución satisface alguna de las siguientes:

- $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.
- $\omega(x(\cdot)) = \{p(\cdot)\}$, donde $p(\cdot)$ es una solución periódica no constante.

[1]Es decir, los ceros de la ecuación característica tienen parte real no nula.

(ii) Si el origen es un equilibrio inestable, se tiene la parte (b) del teorema, i.e. para cada solución $u(\cdot)$ del sistema en $\omega(x)$, $\alpha(u) \cup \omega(u) \subseteq E$, para un conjunto abierto y denso de condiciones iniciales y $p(\cdot)$ es lentamente oscilatoria.

Referencias

[1] Jan De Vries. *Elements of topological dynamics*, volume 257. Springer Science & Business Media, 2013.

[2] John Mallet-Paret and George R Sell. The poincaré–bendixson theorem for monotone cyclic feedback systems with delay. *Journal of differential equations*, 125(2):441–489, 1996.

[3] Hal Smith. *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*, volume 57. Springer Science & Business Media, 2010.